

三次元時間領域動弾性境界要素法の開発とその応用

廣瀬 壮一¹⁾, 齋藤 隆泰²⁾, 木本 和志³⁾

1) 東京工業大学 情報理工学研究科 情報環境学専攻,

shirose@cv.titech.ac.jp

2) 福井大学 工学研究科 原子力・エネルギー安全工学専攻,

tsaito@taku.anc-d.fukui-u.ac.jp

3) 東京工業大学 情報理工学研究科 情報環境学専攻,

kimoto@cv.titech.ac.jp

1. はじめに

境界要素法は無限領域を容易に扱える唯一の数値解析手法であることから、無限や半無限媒体中の波動問題に適した数値解析手法として広く利用されてきた¹⁾。通常、波動問題は時間域か周波数域のいずれかにおいて定式化されるが、時間域境界要素法による解法では時間ステップ幅が小さい時にしばしば解が数値的に不安定になることが知られている。これは、時間域境界積分方程式の時間に関する繰込積分の離散化のために、境界上の未知数に導入される関数補間の近似の精度が十分でないことに起因するものである。そこで、本研究では繰込積分を精度良く安定に計算できる手法である、Lubich⁵⁾による演算子積分法 (Operational Quadrature Method: OQM) を三次元時間領域動弾性境界要素法に適用し、数値解析例を示して OQM の有効性について検討する。さらに、開発した解析手法による数値結果を用いて、マトリクスアレイ探触子を用いた三次元逆散乱イメージング法のシミュレーションを行う。

2. 三次元動弾性時間域積分方程式

図 1 に示すような、均質等方な三次元弾性波動場における外部散乱問題を考える。外部領域を D 、散乱体の境界を S とする。入射波 u_i^{in} が散乱体 D^c により反射・散乱された時、点 x 、時刻 t における全変位場 $u(x, t)$ は以下の時間領域境界積分方程式を満足する。

$$\begin{aligned} c_{ij}(\mathbf{x})u_j(\mathbf{x}, t) &= u_i^{in}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y \\ &- p.v. \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad \mathbf{x} \in S \end{aligned} \quad (1)$$

ただし、 c_{ij} は自由項であり、 $*$ は時間に関する繰込積分を表す。また、 t_j は境界 S 上での表面力ベクトル成分であり、 U_{ij} 及び T_{ij} はそれぞれ、三次元時間領域動弾性問題の基本解及び二重層核である。従来法では式 (1) における境界上の未知量を適当な関数で補間近似して積分を時空間で離散化し、得られた代数方程式を時間ステップごとに逐次解くことにより境界上の変位と表面力を得る。しかしながら、未

知数の補間近似には比較的低次の関数が用いられることが多く、式 (1) の繰込積分を離散化する際に数値誤差が含まれることは避けられない。そして、この誤差が時間ステップ解析において不安定な解が生じる要因となっている。そのため、本研究では式 (1) の時間に関する繰込積分を Lubich が提案した演算子積分法 (OQM) を用いて高精度に評価する。

なお、一度、式 (1) を解くことによって境界上の変位と表面力が得られれば、その解を次式に代入することによって、外部領域 D 内の任意の点での全変位を求めることができる。

$$\begin{aligned} u_j(\mathbf{x}, t) &= u_i^{in}(\mathbf{x}, t) + \int_S U_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * t_j(\mathbf{y}, t) dS_y \\ &- \int_S T_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) * u_j(\mathbf{y}, t) dS_y \quad \mathbf{x} \in D \end{aligned} \quad (2)$$

全変位は入射波と散乱波の和からなるが、上式より右辺の積分の部分が散乱波を表すことがわかる。

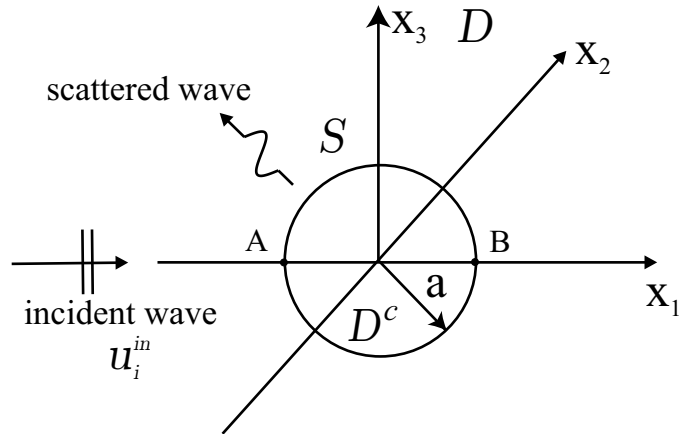


図 1 Scattering model in elastic media.

3. 演算子積分法を用いた三次元時間領域動弾性境界要素法

Lubich⁵⁾による OQM は繰込積分

$$f * g(t) = \int_0^t f(t - \tau)g(\tau) d\tau, \quad t \geq 0 \quad (3)$$

を次式のように離散形で評価する手法である。

$$f * g(n\Delta t) \simeq \sum_j \omega_{n-j} g(j\Delta t) \quad (4)$$

ここに、 ω_n は繰込積分の離散和における重みである。重み ω_n は関数 f の Laplace 変換を導入して、積分の一部を差分解に置き換えることによって、以下のよう計算される。

$$\begin{aligned}\omega_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\xi|=\rho_s} F\left(\frac{\delta(\xi)}{\Delta t}\right) \xi^{-n-1} d\xi \\ &\simeq \frac{\rho_s^{-n}}{L} \sum_{\ell=1}^{L-1} F\left(\frac{\delta(\xi_\ell)}{\Delta t}\right) e^{-\frac{2\pi i n \ell}{L}}\end{aligned}\quad (5)$$

ここに、 F は関数 f の Laplace 変換であり、 $\delta(\xi)$ は線形マルチステップ法なる差分近似における多項式の商を表す。また、 $\xi_\ell = \rho_s e^{2\pi i \ell / L}$ であり、 ρ_s と L は目標とする精度により決定されるパラメータと定数である。

演算子積分法による時間領域境界積分方程式の解析を行うには、式 (1) の繰込積分に式 (4) を適用する。境界上の変位 $u(\mathbf{y}, t)$ 並びに表面力 $t(\mathbf{y}, t)$ の空間分布を近似基底 $\phi_I(\mathbf{y})$ を導入して表したとすると、第 n 番目の時間ステップにおいて、式 (1) は

$$\begin{aligned}c_{ij} \sum_I \phi_I(\mathbf{x}) u_{iI}(n\Delta t) &= u_i^{in}(\mathbf{x}, n\Delta t) \\ + \sum_I \sum_{k=1}^n &\left[A_{ijI}^{n-k}(\mathbf{x}) t_{jI}(k\Delta t) - B_{ijI}^{n-k}(\mathbf{x}) u_{jI}(k\Delta t) \right]\end{aligned}\quad (6)$$

となる。ただし、式 (6) において、 A_{ijI}^m, B_{ijI}^m は以下のように定義される影響関数である。

$$\begin{aligned}A_{ijI}^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho_s^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi_I(\mathbf{y}) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_{\mathbf{y}} \\ B_{ijI}^m(\mathbf{x}) &= \frac{\rho_s^{-m}}{L} \sum_{l=0}^{L-1} \int_S \hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s_l) \phi_I(\mathbf{y}) e^{-\frac{2\pi i m l}{L}} dS_{\mathbf{y}}\end{aligned}$$

ここに、 s_l は $s_l = \delta(\xi_l)/\Delta t$ であり、パラメータ ρ_s は上式において想定される誤差を ϵ として $\rho_s = \sqrt{\epsilon} < 1$ の条件で与えるものである。また、 $\hat{U}_{ij}, \hat{T}_{ij}$ はそれぞれ以下に示すような基本解 U_{ij}, T_{ij} のラプラス変換である。

$$\begin{aligned}\hat{U}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) &= \frac{1}{4\pi\rho} \left[\frac{3r_i r_j - \delta_{ij}}{r^3} \left\{ \frac{sr + c_L}{c_L s^2} e^{-\frac{sr}{c_L}} - \frac{sr + c_T}{c_T s^2} e^{-\frac{sr}{c_T}} \right\} \right. \\ &\quad \left. + \frac{r_i r_j}{r} \left\{ \frac{e^{-\frac{sr}{c_L}}}{c_L^2} - \frac{e^{-\frac{sr}{c_T}}}{c_T^2} \right\} + \frac{\delta_{ij}}{r c_T^2} e^{-\frac{sr}{c_T}} \right]\end{aligned}\quad (7)$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) &= \rho(c_L^2 - 2c_T^2) \hat{U}_{kj,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) n_i(\mathbf{y}) \\ &\quad + \rho c_T^2 (\hat{U}_{ij,k}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s) + \hat{U}_{kj,i}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, s)) n_k(\mathbf{y})\end{aligned}\quad (8)$$

ここに、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ であり、 c_L, c_T はそれぞれ縦波と横波の波速、 ρ は弾性体 D の密度である。また、 $n_i(\mathbf{y})$ は境界における単位外向き法線ベクトルの成分を表す。

4. 数値解析例

数値解析例として、まず、図 1 のような三次元無限弾性体中の球形空洞による平面入射波の散乱問題を考える。入射波は x_1 軸に沿って伝播する縦波とする。入射波の変位場 $u_i^{in}(\mathbf{x}, t)$ と対応する応力場 $\sigma_{ij}^{in}(\mathbf{x}, t)$ は以下の通りである。

$$u_i^{in}(\mathbf{x}, t) = \delta_{i1} \frac{\sigma_0}{\rho c_L^2} (c_L t - x_1 - a) H(c_L t - (x_1 + a))\quad (9)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij}^{in}(\mathbf{x}, t) &= -\sigma_0 \{ (1 - 2\kappa) \delta_{ij} + 2\kappa \delta_{i1} \delta_{j1} \} \\ &\quad \times H(c_L t - (x_1 + a))\end{aligned}\quad (10)$$

ここに、 a は空洞の半径、 δ_{ij} はクロネッカーデルタ、 $\kappa = c_T^2/c_L^2$ であり、 σ_0 は入射波の応力振幅である。時間ステップ幅は $c_T \Delta t/a = 0.12$ とし、影響関数 A_{ijI}^m, B_{ijI}^m の評価に必要なパラメータを $L = 64, \rho_s = 0.94746353$ として解析を行った。また、空洞を要素数 384 の一定要素で離散化した。

周波数域における三次元球形空洞による散乱問題の解は、Pao and Mow⁶⁾ により解析解が与えられている。その解析解を逆フーリエ変換すれば時間領域の解を得ることができる。図 2 は、図 1 の A, B 点における無次元化された x_1 方向の変位 $\rho c_T^2 u_1 / \sigma_0 a$ の時刻歴応答を示している。入射波面が最初に点 A に到達する時刻を $c_L t/a = 0.0$ としている。A 点に入射波が到達後、A 点の変位は次第に増加し始め、時刻 $c_L t/a = 2$ 付近からその傾きはやや緩やかになる。入射波が最初に B 点に到達する時刻 $c_L t/a = 2.0$ 付近で B 点の変位もゆっくりと増加しはじめる。この図には、Pao and Mow による解析解 (記号) と本手法の OQBEM による数値結果 (実線及び破線) を比較して示している。両者はよく一致していることから本手法の精度が高いことがわかる。

図 3 は OQBEM において時間ステップを $c_T \Delta t/a = 0.04, 0.12$ とした場合の図 1 の点 A での x_1 方向の変位を Pao and Mow の解析結果と比較して示したものである。時間ステップ幅を小さくしても解析結果とよく一致した結果が得られており、OQBEM を用いることによって時間ステップ幅によらず安定した高精度な解が得られることがわかる。

図 4 は、

$$u_i^{in}(\mathbf{x}, t) = \delta_{i1} \frac{\sigma_0}{\rho c_L^2} \{ 1 - \cos 2\pi \langle \alpha \rangle (c_L t - x_1 - a) \}\quad (11)$$

なる平面縦波が球形の空洞に入射した場合の、時刻 $c_L t/a = 0.6, 2.1, 2.55$ における平面 $x_3 = 0$ 内の空洞近傍の散乱の様子をカラーマップで表したものである。上式において、 $\langle \alpha \rangle$ は

$$\langle \alpha \rangle = \begin{cases} \alpha & \text{for } 0 \leq \alpha \leq 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}\quad (12)$$

である．空洞周りの散乱の様子がよく再現されている．

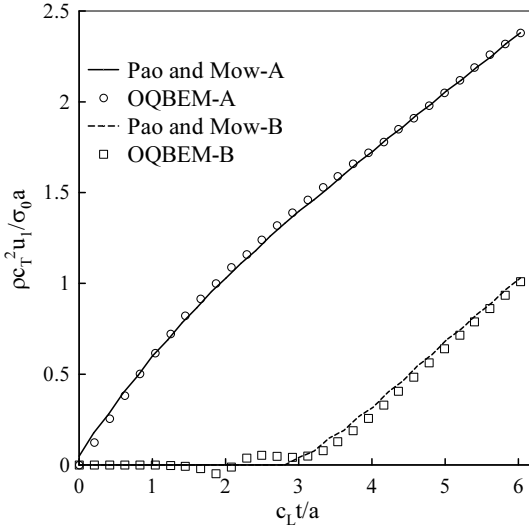


図 2 Normalized displacements $\rho c_T^2 u_1 / \sigma_0 a$ as a function of time $c_L t / a$ at the points A and B on the spherical boundary of a cavity.

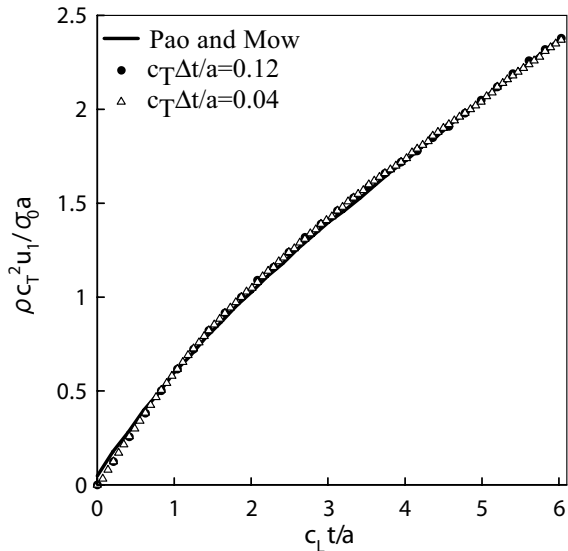


図 3 Normalized displacements $\rho c_T^2 u_1 / \sigma_0 a$ as a function of time $c_L t / a$ at the point A, calculated for different time increments.

最後に，図 5 に示すように，2 つの球形空洞が直列に配置された散乱体に平面縦波が入射したときの空洞表面上の A ~ F の点における x_1 方向の変位の時間変化を示したものである．入射波の変位波形は式 (9) に示したものである．空洞が一個の場合の結果である図 2 と比較すると，図 5 の C, D 点の結果には，二個の空洞の相互作用の影響が明確に見てとれる．

5. 逆散乱イメージング法

近年，構造材料の損傷評価の定量化が必要とされ，欠陥のサイジングの問題が重要な研究課題となっている．このような中で，アレイ計測といった計測手法の発展に伴って，多数の点で計測された散乱波から散乱体の形状を得る逆散乱イメージングは有力なサイジング手法として期待されている．ここでは，前節までに述べた三次元時間域境界要素法を用いて数値的に得られた散乱波を用いて逆散乱イメージングをシミュレーションするものである．

本解析で対象とする超音波の送受信概要を図 6 に示す．均質等方な弾性体 D 内に散乱体 D^c が存在しているものとし，複数の振動素子からなるアレイ探触子の y に位置する一つの素子から入射波 u^{in} を送信し，散乱体 D^c によって散乱された波 $u^{sc}(y)$ を同じ位置にある素子によって受信したとする．アレイ探触子の振動素子は y_1, y_2 方向にそれぞれ素子間隔 $\Delta y_1, \Delta y_2$ で $y_3 =$ 一定の面内にマトリクス状に配置され，送受信位置を変えながらすべての素子において欠陥エコーを得たとする．なお，1 つのアレイ素子から送信される波動は球面状の縦波であり，受信点では散乱波の x_3 方向の縦波成分を計測したとする．以下においては，ボルン近似とキルヒホフ近似を用いた二つの線形化逆散乱解析法を示す．

5.1. ボルン逆散乱法

欠陥 D^c の領域内部において 1 なる値をとり，欠陥領域以外では 0 なる値をとる関数を特性関数 $\Gamma(x_1, x_2, x_3)$ として定義する⁴⁾．式の誘導の詳細は割愛するが，式 (2) の積分部分に対応する散乱波の積分表現にボルン近似³⁾(全変位場を入射波で近似)すると，特性関数 Γ はアレイ素子で得られる欠陥エコー $u_3^{sc}(y)$ (計測点 y における y_3 方向の変位) を用いて次のように表される．

$$\Gamma(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbf{K}} \frac{16\pi^2 k_3 y_3 u_3^{sc}(k_1, k_2, y_3)}{i u^0 (k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \exp(ik_3 y_3)} \exp[i\{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3\}] dk_1 dk_2 dk_3 \quad (13)$$

ここで， $u_3^{sc}(k_1, k_2, y_3)$ は欠陥エコー $u_3^{sc}(y_1, y_2, y_3)$ を

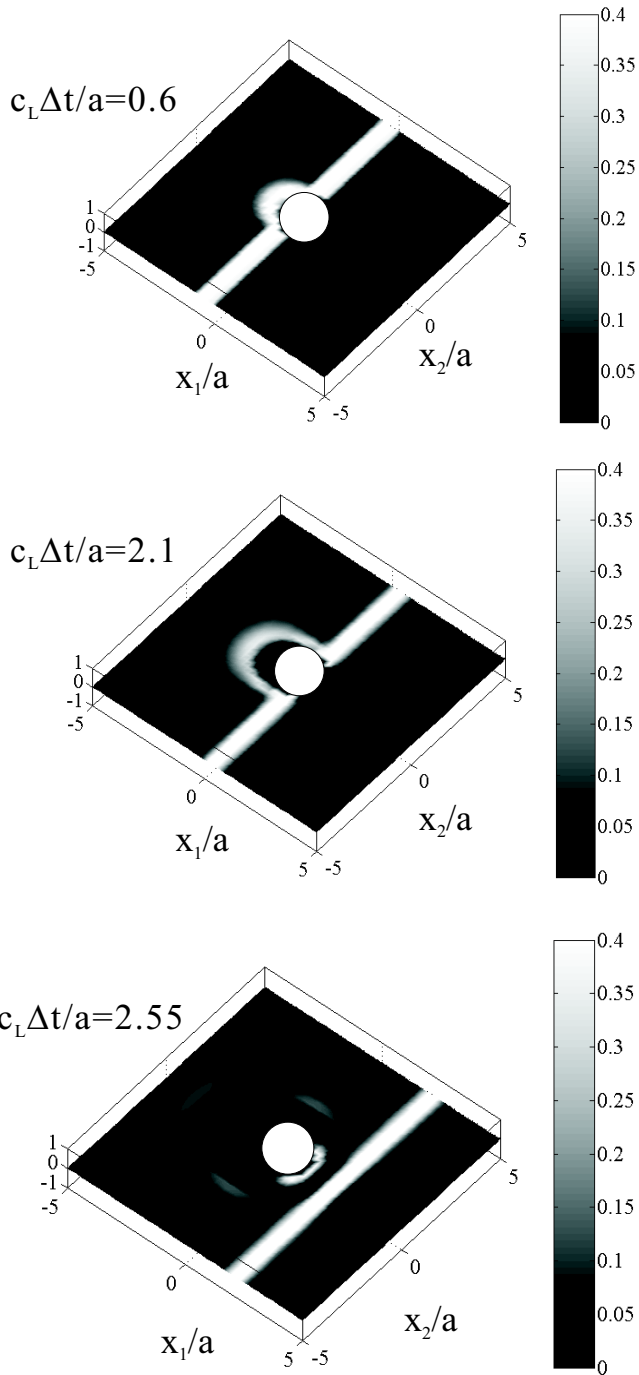


Figure 4 Scattering waves in the plane $x_3 = 0$ around a cavity at times $c_L t/a = 0.6, 2.1$ and 2.55 .

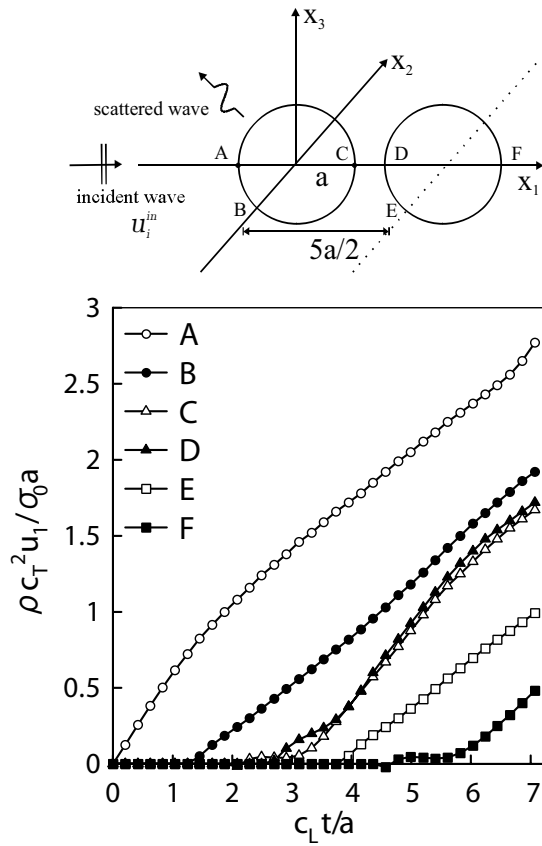


Figure 5 Normalized displacements $\rho c_T^2 u_1 / \sigma_0 a$ as a function of time $c_L t/a$ at the points A-F, on boundaries of two spherical cavities.

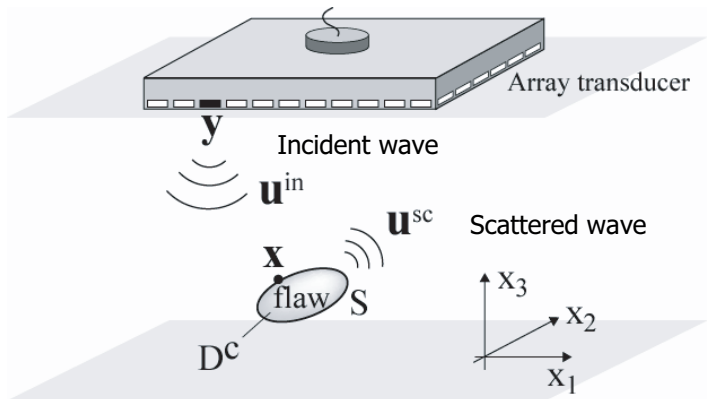


Figure 6 Configuration of arrayed ultrasonic measurement.

座標 y_1 および y_2 に関してフーリエ変換：

$$u_3^{sc}(k_1, k_2, y_3) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_3^{sc}(y_1, y_2, y_3) \exp[-i\{k_1 y_1 + k_2 y_2\}] dy_1 dy_2 \quad (14)$$

したものである．式 (13) と (14) はそれぞれ 3-D 並びに 2-D FFT を用いて効率的に計算することができる．式 (13) において k_1 および k_2 に関する数値積分の最大値はアレイ素子の間隔 Δy_i ($i = 1, 2$) に依存し， $k_i^{\max} = \pi/\Delta y_i$ である．また， k_3 に関する積分は受信超音波の最高周波数 f^{\max} に依存し， $k_3^{\max} = 2\pi f^{\max}/c_L$ となる．

5.2. キルヒホフ逆散乱法

散乱波の積分表現である式 (2) の積分にキルヒホフ近似²⁾(散乱体の境界上の散乱波を局所的な平面波の反射波で近似)を用いて変形すると，次式を得る．

$$\gamma_H(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(2\pi)^3} \iiint_{\mathbf{K}} \frac{-8\pi^2 k_3 y_3 u_3^{sc}(k_1, k_2, y_3)}{u^0 \sqrt{k_1^2 + k_2^2 + k_3^2} \exp(ik_3 y_3)} \times \exp[i\{k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3\}] dk_1 dk_2 dk_3 \quad (15)$$

ここで， γ_H は超音波が直接到達する欠陥の境界部分のみで値を有する特異関数と呼ばれる関数である．

次節では，式 (2) によって得られた散乱波を式 (13) と式 (15) に適用して欠陥形状の再構成のシミュレーションを行う．

6. イメージング結果

図 7 の挿絵にあるように， $x_3 = 50\text{mm}$ の平面上に， $0.8\text{mm} \times 0.8\text{mm}$ 角の振動素子を 1.6mm 間隔で， x_1, x_2 方向にそれぞれ 32 個ずつ合計 32×32 個，マトリクス状に配置したアレイ計測を考える．用いたデータは，最大周波数 3MHz ，中心周波数 1.75MHz の周波数域での直径 4mm の球形空洞による散乱波である．

図 7 は，ボルン逆散乱法による特性関数 Γ (左段) 並びにキルヒホフ逆散乱法による特異関数 γ_H (右段) の分布を $x_2 = -4, -2, 0\text{mm}$ の各断面においてカラーマップを用いて示したものである．アレイ探触子による計測範囲がさほど広くないので，球状空洞の境界の詳細な形状までは再現されていないが，ボルン，キルヒホフのいずれの解析結果にも空洞が存在するであろう断面において，空洞上部の領域あるいは境界に対する適切な指示が現れている．

図 8 は，図 7 と同様のシミュレーションを挿絵に示す 4 個の空洞に対して行って得たキルヒホフ逆散乱によるイメージ図である． $x_2 = -4, -2, 0\text{mm}$ の各断面において空洞上部の境界が再現されていることがわかる．

7. おわりに

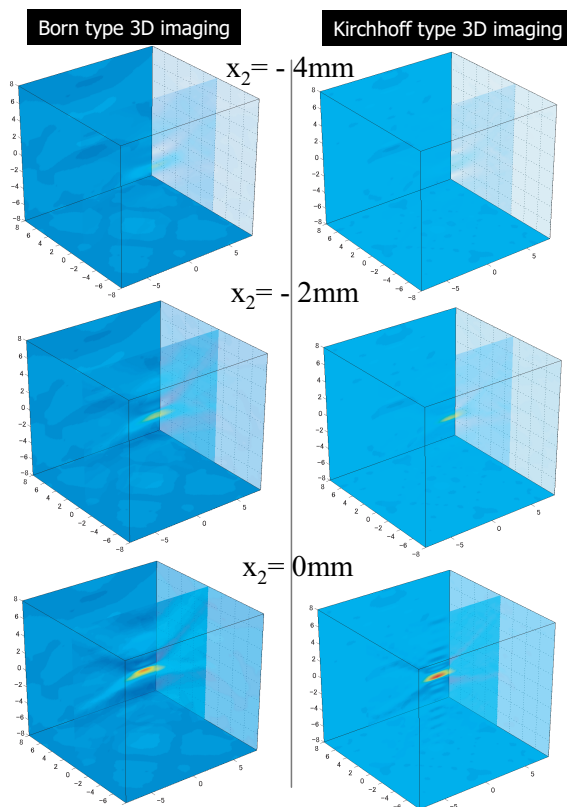
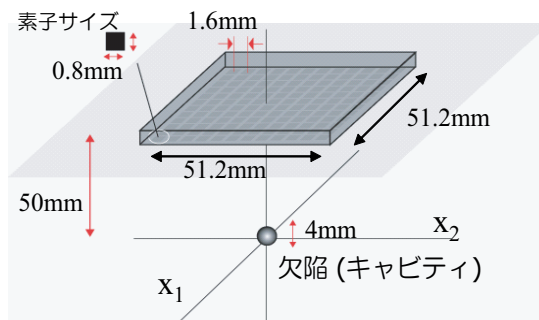


図 7 Sliced images of several cross sections of a cavity reconstructed by Born (left) and Kirchhoff (right) inversions.

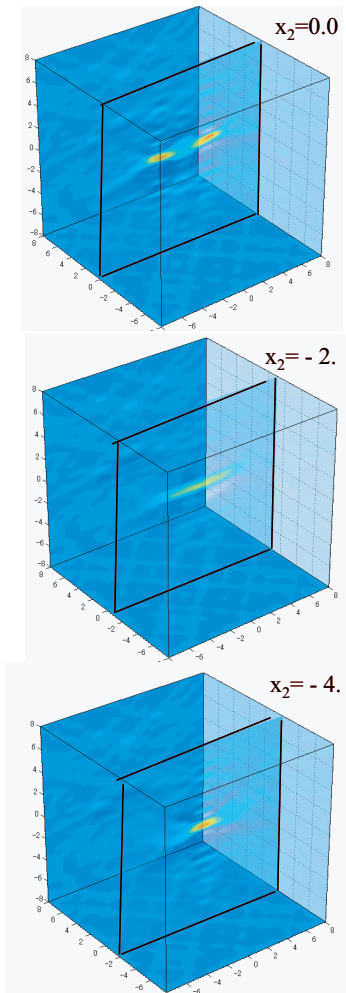
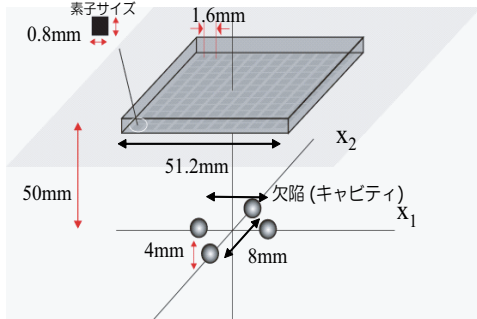


図 8 Sliced images of several cross sections of four cavities reconstructed by Kirchhoff inversions.

本研究では、まず、Lubich が提案した演算子積分法を三次元時間領域動弾性境界要素に適用して、その計算精度を解析解と比較した。今後は、計算時間や記憶容量を低減させるために、高速多重極法⁷⁾を組み込んだ手法を開発する予定である。また、マトリックスアレイ探触子で得られる欠陥エコーを基に欠陥形状を3次元的に再構成する3-D逆散乱イメージング法を開発した。数値シミュレーションの結果、ポルン・キルヒホフの両逆散乱法ともに入射波が当たる欠陥形状を良好に再現できることがわかった。

謝辞

5節、6節の逆散乱イメージングに関する研究の遂行においては、愛媛大学 中畑和之氏に多大なご協力を頂きました。ここに感謝の意を表します。

参考文献

- 1) 小林昭一編著: 波動解析と境界要素法, 京都大学学術出版会 (2000).
- 2) Bleistein, N. : *Mathematical Methods for Wave Phenomena*, Academic Press, Orlando (1984).
- 3) Gubernatis, J. E., Domany, E., Krumhansl J. A. and Huberman M.: The Born approximation in the theory of the scattering of elastic waves by flaws, *J. Appl. Phys.*, **48** (1977) pp. 2812–2819.
- 4) Kitahara, M., Nakahata, K. and Hirose, S.: Elastodynamic inversion for shape reconstruction and type classification of flaws, *Wave Motion*, **36** (2002), pp.443–455.
- 5) Lubich, C. : Convolution quadrature and discretized operational calculus I *Numer. Math.*, **52** (1988), pp. 129–145.
- 6) Pao, Y.-H. and Mow, C. C.: *Diffraction of Elastic Waves and Dynamic Stress Concentrations*, Crane and Russak, New York (1973).
- 7) Rokhlin, V: Rapid solution of integral equations of classical potential theory, *J. Comput. Phys.*, **60** (1985), pp. 187–207.